量子场论调研小论文

——— 关于无质量和有质量矢量场的量子化

方硕 PB17071424

2019年12月19日

摘要

本调研小论文是对高道能老师上课时提到的正则量子化的完善和补充。我们在课上只学习了《An Introduction to Quantum Field Theory》(Peskin and Schroeder)书上关于实标量场，复标量场和狄拉克旋量场的正则量子化方法，但是在使用正则量子化方法来量子化矢量场的时候，我们遇到了一些困难。本文中，笔者就试图通过查阅资料来解决它们，使得我们的知识框架中关于正则量子化的理论体系更加完善。

1 无质量矢量场的正则量子化

我们在上课时谈到自由场的正则量子化的时候，主要讨论了标量场和旋量场的正则量子化。很自然的，我们想要延续以上套路来进行，不过我们这里只考虑一个不失一般性的特殊无质量矢量场：自由电磁场。

首先，我们很容易的可以知道它的拉格朗日量：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Maxwell} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\partial^\mu A^\nu \qquad (1)\end{aligned}$$

这里，我们有$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

然后我们可以写出场A^μ的共轭动量如下：

$$\begin{aligned}\pi^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} \\ &= -\frac{1}{2}((\delta^0_\mu\delta^0_\nu - \delta^0_\nu\delta^0_\mu)\partial^\mu A^\nu - F_{\mu\nu}g^{\mu0}g^{\nu0}) \\ &= 0 \qquad (2a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} \\ &= -\frac{1}{2}((\delta^0_\mu\delta^i_\nu - \delta^0_\nu\delta^i_\mu)\partial^\mu A^\nu - F_{\mu\nu}g^{\mu0}g^{\nu i}) \\ &= -F^{0i} = E^i \qquad (2b)\end{aligned}$$

而根据电磁学结论，在真空中，电场满足约束方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3}$$

这点与经典是对应的，因为以上对4个正则动量一共有两个约束，光场也只有两个横向极化。但是这样的话，就造成了如下后果：

$$[A^0(x), \pi^0(y)]|_{x^0=y^0} = 0$$

这与场的正则量子化条件$[A^0(x), \pi^0(y)]|_{x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$直觉上是相矛盾的，这是因为我们没有选取任何规范。所以下面我们将选取最为常见的Lorentz规范：

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4}$$

它将会保证协变性。当然，规范是可以任意选取的，因为拉氏量在不同规范下是不变的。

1.1 正则量子化

在引入规范$\partial_\mu A^\mu = 0$后，可以将拉氏量改写：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Maxwell} &= -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\partial^\mu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu(A_\mu \partial^\mu A^\nu) - A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu\end{aligned} \tag{5}$$

这里，我们忽略了全微分项，它并不影响拉氏量；而且使用了Lorentz规范条件。
由此，可以很简单的求得正则动量：

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \\ &= -\frac{1}{2}(\delta^0_\alpha \delta^\mu_\beta \partial^\alpha A^\beta + \partial_\alpha A_\beta g^{\alpha 0} g^{\beta\mu}) \\ &= -\frac{1}{2}(\dot{A}^\mu + \partial^0 A^\mu) \\ &= -\dot{A}^\mu\end{aligned} \tag{6}$$

如果我们承认正则量子化条件，就会有以下的结果：

$$[A^\mu(x), \pi^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = ig^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{7a}$$

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = [\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \tag{7b}$$

或者将π^μ的表达式代入其中，

$$[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = -ig^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{8a}$$

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = [\dot{A}^\mu(x), \dot{A}^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \tag{8b}$$

此外，我们又有以下：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu = 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中，我们使用了Lorentz规范条件，而且由结果可以看见，零质量矢量场各个分量满足的方程正是当$m = 0$时的Klein-Gordon方程。那么它的解也可以模仿K-G方程的解写出。但是这里有些细节值得注意：由于这里的矢量场各个分量都带有指标，所以平面波的展开系数$a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger$都是和分量相关的。

所以先试探性的写出解：

$$
A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (c_{\mathbf{p}}^\mu e^{-ip\cdot x} + (c_{\mathbf{p}}^\mu)^\dagger e^{ip\cdot x}) \tag{10}
$$

注意到以上规范也可以取为Coulomb规范：

$$
A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{11}
$$

此时写出的矢量场各分量满足的方程：

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\
&\Rightarrow \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu (\dot{A}_0 + \nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu = 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

仍然是Klein-Gordon方程。那么，我们可以直接写出它的一个特解：

$$
\mathbf{A}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \vec{\xi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{13}
$$

但是由于Coulomb规范$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$我们可以得出：

$$
\vec{\xi}(\mathbf{p}) \cdot \vec{p} = 0 \tag{14}
$$

这里，矢量$\vec{\xi}$总是与光子动量方向(传播方向)是垂直的，而考虑到光子的极化特性，我们有理由认为，这就是光子的极化矢量的线性组合。

所以，可以将$\vec{\xi}$分解成为两个相互正交的基的线性叠加，它们满足正交归一：

$$
\vec{\epsilon_r}(\mathbf{p}) \cdot \vec{\epsilon_s}(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, r, s = 1, 2 \tag{15}
$$

有了这种想法后，我们可以重新考察光子传播方向的地位，把它作为极化矢量中的一员，共同用来描述光子的极化传播特性。于是，我们就有了Coulomb规范下的极化矢量：

$$
\{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\} \tag{16}
$$

其中，

$$
\epsilon_1 = (1,0,0)^T, \epsilon_2 = (0,1,0)^T, \epsilon_3 = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = (0,0,1)^T \tag{17}
$$

这里，我们将光子的传播方向取为了z方向，横向极化限制在了xy平面中，不难发现这组极化矢量是彼此相互正交的：

$$\epsilon_r \cdot \epsilon_s = \delta_{rs}, r, s = 1, 2, 3 \tag{18}$$

现在再次回到Lorentz规范上来，由于场分量的平面波展开的分量系数也应当反映出光子的极化特性，而且分量反映了四维的协变特性，所以极化分量应当具有以下的Lorentz协变性：

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon_\mu} \cdot \vec{\epsilon_\nu} &= \epsilon_{\mu 0}\epsilon_\nu^0 + \epsilon_{\mu 1}\epsilon_\nu^1 + \epsilon_{\mu 2}\epsilon_\nu^2 + \epsilon_{\mu 3}\epsilon_\nu^3 \\ &= g_{rs}\epsilon_\mu^r \epsilon_\nu^s \\ &= g_{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\end{aligned} \tag{19}$$

这里的μ, ν是Lorentz指标，反映的是四维协变性。而r, s反映的是具体的极化方向。不同的极化方向满足正交归一特性，这点是从三维情况直接推导出的。此外，还要满足不同极化矢量之间的完备性关系：

$$\epsilon_r^\mu \epsilon_{\mu s} = g_{rs}, r, s = 0, 1, 2, 3 \tag{20}$$

这里的第零个极化可以取为四维新添加的那个方向的单位矢量，而另外三个只需将三维推广到四维即可：

$$\epsilon_0^\mu = (1, 0, 0, 0)^T, \epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0)^T, \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)^T, \epsilon_3^\mu = (0, 0, 0, 1)^T \tag{21}$$

所以，现在可以将平面波的展开系数确定下来：

$$c_{\mathbf{p}}^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\lambda^\mu a_{\mathbf{p}} \tag{22}$$

这里极化矢量的下标λ表示的是极化方向，实际的情况需要对极化求和。所以可以将场分量写成下式：

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\lambda^\mu (a_{\mathbf{p}}^\lambda e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} e^{ip\cdot x}) \tag{23}$$

进一步的，可以写出场的正则动量算符：

$$\begin{aligned}\pi^\mu(x) &= -\dot{A}^\mu \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (+i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\lambda^\mu (a_{\mathbf{p}}^\lambda e^{-ip\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} e^{ip\cdot x})\end{aligned} \tag{24}$$

基于以上，可以通过傅里叶逆变化给出产生湮灭算符的表示：首先，如果按平面波进行展开，那么将可以发现平面波基之间的正交归一条件：

$$\text{平面波基：} \phi_{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{-ip\cdot x}$$

$$\text{正交归一化条件} \begin{cases} \displaystyle\int d^3x \phi_{\mathbf{p}}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathbf{p}'}(x) = 0 \\ \displaystyle\int d^3x \phi_{\mathbf{p}}^*(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathbf{p}'}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{cases} \tag{25}$$

这里，我们使用了记号：

$$A\overleftrightarrow{\partial_\mu}B = A\partial_\mu B - \partial_\mu AB \tag{26}$$

于是，我们可以可以根据平面波基的上述性质得出产生湮灭算符的表示，过程如下：

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu_\lambda(a^\lambda_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x} + a^{\lambda\dagger}_\mathbf{p}e^{ip\cdot x}) \\ &= \int d^3\mathbf{p}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu_\lambda(a^\lambda_\mathbf{p}\phi_\mathbf{p}(\mathbf{x}) + a^{\lambda\dagger}_\mathbf{p}\phi^*_p(x)) \end{aligned} \tag{27}$$

将上式的左右两侧分别作用$\int d^3\mathbf{x}(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x)$则有：

$$\begin{aligned} &\int d^3\mathbf{x}A^\mu(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x) = \int d^3\mathbf{p}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu_\lambda a^\lambda_\mathbf{p}\int d^3\mathbf{x}\phi_\mathbf{p}(\mathbf{x})(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x) \\ &\Rightarrow \int d^3\mathbf{x}A^\mu(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x) = \int d^3\mathbf{p}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu_\lambda a^\lambda_\mathbf{p}(-\frac{1}{(2\pi)^3})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\ &\Rightarrow \sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu_\lambda a^\lambda_\mathbf{p} = (2\pi)^3\int d^3\mathbf{x}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}A^\mu \end{aligned} \tag{28}$$

由于极化矢量ϵ^μ_λ也具有正交归一性，所以在上式两边我们同时点乘矢量$g^{\sigma\lambda}\epsilon_{\sigma\nu}$我们可以解出$a_\mathbf{p}$：

$$\begin{aligned} g^{\sigma\lambda}\epsilon_{\sigma\nu}\epsilon^\mu_\lambda a^\lambda_\mathbf{p} &= (2\pi)^3\int d^3\mathbf{x}g^{\sigma\lambda}\epsilon_{\sigma\nu}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}A^\mu \\ \Rightarrow \delta^\mu_\nu a^\lambda_\mathbf{p} &= g^{\sigma\lambda}(2\pi)^3\int d^3\mathbf{x}\epsilon_{\sigma\nu}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}A^\mu \\ \Rightarrow a^\lambda_\mathbf{p} &= \delta^\nu_\mu g^{\sigma\lambda}(2\pi)^3\int d^3\mathbf{x}\epsilon_{\sigma\nu}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}A^\mu \\ \Rightarrow a^\lambda_\mathbf{p} &= g^{\sigma\lambda}(2\pi)^3\int d^3\mathbf{x}\epsilon_{\sigma\mu}\phi^*_{\mathbf{p}'}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}A^\mu \end{aligned} \tag{29}$$

同理，我们可以得到$a^\dagger_\mathbf{p}$如下：

$$a^{\lambda\dagger}_\mathbf{p} = g^{\sigma\lambda}(2\pi)^3\int d^3\mathbf{x}\epsilon_{\sigma\mu}\phi_{\mathbf{p}'}(x)(-i)\overleftrightarrow{\partial_0}A^\mu \tag{30}$$

这里，$\phi_\mathbf{p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot x}$.整理后，可以得到它们的进一步表示：

$$\begin{cases} a_{\sigma\mathbf{p}} = g_{\sigma\sigma'}\int d^3\mathbf{x}\epsilon^{\sigma'}_\mu\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(\dot{A}^\mu - iE_\mathbf{p}A^\mu) \\ a^\dagger_{\sigma\mathbf{p}} = g_{\sigma\sigma'}\int d^3\mathbf{x}\epsilon^{\sigma'}_\mu\frac{-ie^{-ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(\dot{A}^\mu + iE_\mathbf{p}A^\mu) \end{cases} \tag{31}$$

然后，我们可以写出产生湮灭算符所满足的对易关系如下：

$$\begin{aligned} [a_{\sigma\mathbf{p}}, a^\dagger_{\lambda\mathbf{p}'}] &= g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\frac{-ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon^{\sigma'}_\mu\epsilon^{\lambda'}_\nu[\dot{A}^\mu - iE_\mathbf{p}A^\mu, \dot{A}^\nu + iE_{\mathbf{p}'}A^\nu] \\ &= g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\frac{-ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon^{\sigma'}_\mu\epsilon^{\lambda'}_\nu(-g^{\mu\nu}E_{\mathbf{p}'} - g^{\mu\nu}E_\mathbf{p})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}g^{\sigma'\lambda'}\int d^3\mathbf{x}\frac{e^{i(p-p')\cdot x}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}}(E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{p}}) \\
&= -g_{\sigma\lambda}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \qquad (32)
\end{aligned}
$$

同理，也可以验证其他的对易关系都是0.

$$
\begin{aligned}
[a_{\sigma\mathbf{p}}, a_{\lambda\mathbf{p}'}] &= g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{-ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon_\mu^{\sigma'}\epsilon_\nu^{\lambda'}[\dot{A}^\mu - iE_{\mathbf{p}}A^\mu, \dot{A}^\nu - iE_{\mathbf{p}'}A^\nu] \\
&= g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{-ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon_\mu^{\sigma'}\epsilon_\nu^{\lambda'}(g^{\mu\nu}E_{\mathbf{p}'} - g^{\mu\nu}E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&= -g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}g^{\sigma'\lambda'}\int d^3\mathbf{x}\frac{e^{i(p-p')\cdot x}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}}(E_{\mathbf{p}'}-E_{\mathbf{p}}) \\
&= 0 \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[a^\dagger_{\sigma\mathbf{p}}, a^\dagger_{\lambda\mathbf{p}'}] &= g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{-ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon_\mu^{\sigma'}\epsilon_\nu^{\lambda'}[\dot{A}^\mu + iE_{\mathbf{p}}A^\mu, \dot{A}^\nu + iE_{\mathbf{p}'}A^\nu] \\
&= g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{-ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon_\mu^{\sigma'}\epsilon_\nu^{\lambda'}(-g^{\mu\nu}E_{\mathbf{p}'} + g^{\mu\nu}E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&= -g_{\sigma\sigma'}g_{\lambda\lambda'}g^{\sigma'\lambda'}\int d^3\mathbf{x}\frac{e^{i(p-p')\cdot x}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}}(-E_{\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{p}}) \\
&= 0 \qquad (34)
\end{aligned}
$$

至此，我们可以说完成了电磁场的正则量子化。

1.2 一些困难

1.2.1 负模态

然而，以上的过程存在一些内禀的困难，首先就是当极化均为0时的产生算符和湮灭算符的正则对易关系给出了负值：

$$[a_{0\mathbf{p}}, a^\dagger_{0\mathbf{p}'}] = -1\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \qquad (35)$$

如果考虑到将$a^\dagger_{0\mathbf{p}'}$作用到真空态上将会有负模态出现：

$$
\begin{aligned}
|a^\dagger_{0\mathbf{p}}|0>|^2 = <0|a_{0\mathbf{p}}a^\dagger_{0\mathbf{p}}|0> = <0|[a_{0\mathbf{p}}, a^\dagger_{0\mathbf{p}}]|0> \\
= -1\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(0) < 0 \qquad (36)
\end{aligned}
$$

这表示当极化取为第零个时，出现了非物理的东西！

这个困难是可以理解的，因为使用Lorentz规范的时候，我们已经将所有的极化都量子化了，但是物理的极化只有2个，即使考虑到极化之间由于Lorentz规范带来的约束使得极化的自由度降为了3，仍然有一个自由度是非物理的，这就在以上的对易关系中得以体现了出来。

我查阅资料后发现这4个不同分量的极化的命名如下：第0个极化称为标量极化或是类时极化；第1，2个极化称为横向极化，正是我们平时所说的光子的极化；第3个极化称为纵向极化。实际的极化只有第1，2个是物理的，第0，3个极化都是非物理的。

然而，负模态毕竟是不可接受的！所以这确实是正则量子化中出现的巨大困难。

1.2.2 能量正定性问题

我们现在考察能量问题：

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} &= -\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{2}(\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - \nabla A_\nu \cdot \nabla A^\nu) \\ &= -\frac{1}{2}(\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \nabla A_\nu \cdot \nabla A^\nu)\end{aligned} \tag{37}$$

所以体系哈密顿量：

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \mathcal{H} = -\frac{1}{2}\int d^3x(\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \nabla A_\nu \cdot \nabla A^\nu) \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3}\epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\sigma\mu}[-E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}](a_{\mathbf{p}}^\lambda e^{-ip\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}e^{ip\cdot x})(a_{\mathbf{q}}^\sigma e^{-iq\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^{\sigma\dagger}e^{iq\cdot x}) \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3}\epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\sigma\mu}[-E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}] \\ &\quad (a_{\mathbf{p}}^\lambda a_{\mathbf{q}}^\sigma e^{-i(p+q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\lambda a_{\mathbf{q}}^{\sigma\dagger}e^{-i(p-q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{q}}^\sigma e^{-i(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{q}}^{\sigma\dagger}e^{i(p+q)\cdot x}) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3}\epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\sigma\mu}[(E_{\mathbf{p}}^2 - \mathbf{p}^2)(a_{\mathbf{p}}^\lambda a_{-\mathbf{p}}^\sigma e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{-\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}e^{2iE_{\mathbf{p}}t}) - (E_{\mathbf{p}}^2 + \mathbf{p}^2)(a_{\mathbf{p}}^\lambda a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{p}}^\sigma)] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3}\epsilon_\lambda^\mu \epsilon_{\sigma\mu}(-2E_{\mathbf{p}}^2)(a_{\mathbf{p}}^\lambda a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{p}}^\sigma) \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\lambda\sigma}(a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{p}}^\sigma + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{p}}^\sigma) \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\sum_{\lambda=0}^{3}g_{\lambda\lambda}a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}a_{\mathbf{q}}^\lambda \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}(\sum_{i=1}^{3}a_{\mathbf{p}}^{i\dagger}a_{\mathbf{q}}^i - a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{q}}^0)\end{aligned} \tag{38}$$

其中，我们利用了产生湮灭算符的对易关系，并且像在标量场中一样忽略了零点能。

但是在上式中，哈密顿量并不总是正定的，因为$a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{q}}^0$前面是符号，这个困难和狄拉克旋量场中一开始我们遇到的困难是一致的，这再次说明上面的正则量子化过程是有问题的。

1.3 解决方法

对于此，理论物理学家Suraj N. Gupta和 Konrad Bleuler在1950年各自独立地提出了同一个解决方案，那就是重新考察Lorentz规范的物理含义。

由于我们一般而言都只是关心Hilbert空间中态矢而不是场算符的约束条件，因为物理中一个力学量总是需要在两个态矢间求出矩阵元才可以得到最终可观测的，有实际物理意义的量。所以对于场算符的约束$\partial_\mu A^\mu = 0$会不会有些太强了？

如果我们加稍稍削弱一点条件，使$\partial_\mu A^\mu$作用在任何一个态矢上得到的结果是零矢量，也就是：

$$\partial_\mu A^\mu|\Psi>= 0 \tag{39}$$

可不可以呢？

为此，可以把场算符分解成为两项，正如我们在使用Wick定理时的那样：

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) \\ &\equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_{\mu\lambda}a_\mathbf{p}^\lambda e^{-ip\cdot x} + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_{\mu\lambda}a_\mathbf{p}^{\lambda\dagger} e^{ip\cdot x} \end{aligned} \tag{40}$$

那么，我们发现

$$\begin{gathered} A_\mu^{(+)}(x)|0>= 0 \\ \text{但是 } \partial^\mu A_\mu^{(-)}(x)|0>\neq 0 \end{gathered} \tag{41}$$

所以这样得到的真空态中仍然有非物理的成分。

为此，Gupta和Bleuler建议，可以把以上条件再削弱一些，只是让$\partial_\mu A^\mu$在两个态矢之间的期望值是零。

$$< \Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi >= 0 \tag{42}$$

这个条件被称为 弱Lorentz规范条件 或者称为 Gupta-Bleuler条件 。

下面来具体考察这个条件的物理含义：仍然按照上面的公式将$A_\mu(x)$分解成正负两项，那么Gupta-Bleuler条件就变成了：

$$\begin{aligned} &< \Psi|\partial^\mu A_\mu|\Psi >= 0 \\ &\Rightarrow < \Psi|\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\Psi > + < \Psi|\partial^\mu A_\mu^{(-)}|\Psi >= 0 \\ &\Rightarrow < \Psi|\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\Psi > + < \Psi|\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\Psi >^*= 0 \\ &\Rightarrow < \Psi|\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\Psi >= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

对于一个可观测量来说，如果在任何态下的平均值都为零，那么它作用在任何态上也都会得到0，即：

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\Psi >= 0 \tag{44}$$

那么

$$\begin{aligned} &\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\Psi >= 0 \\ &\Rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_{\mu\lambda}a_\mathbf{p}^\lambda \partial^\mu e^{-ip\cdot x}|\Psi >= 0 \\ &\Rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}(-ip^\mu)\cdot\epsilon_{\mu\lambda}a_\mathbf{p}^\lambda e^{-ip\cdot x}|\Psi >= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

由于光子的动量为$p^\mu = (k,0,0,k)$那么带入后将会得到

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}k(a_\mathbf{p}^0 - a_\mathbf{p}^3)e^{-ip\cdot x}|\Psi >= 0 \\ &\Rightarrow (a_\mathbf{p}^0 - a_\mathbf{p}^3)|\Psi >= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

它的物理意义很明确，就是说对于任意的一个状态，光子的第零标量极化和第三纵向极化一定会彼此消掉，它们要么成对存在，要么成对不存在，总之，它们的效果肯定是互相消去的，看不到单独存在的标量光子和纵向光子。因此，光子场表现出来就是只有2个横向极化。

在真空态下，如果要对某一个可观测量进行测量，那么相当于在这个态下对它求平均值，由于相关算符总是呈现$a^\dagger a$的形式的组合，所以非物理的那两个极化总是可以消去。

接下来可以使用以上的方法来解决我们之前提到的量子化中的一些困难。由(46)可知：

$$
\begin{aligned}
& a_{\mathbf{p}}^0|\Psi>=a_{\mathbf{p}}^3|\Psi> \\
& \Rightarrow\ <\Psi|a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}=<\Psi|a_{\mathbf{p}}^{3\dagger} \\
& \Rightarrow\ <\Psi|a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{p}}^0|\Psi>=<\Psi|a_{\mathbf{p}}^{3\dagger}a_{\mathbf{p}}^3|\Psi>
\end{aligned} \tag{47}
$$

将上式用到哈密顿算符两边，我们将会得到：

$$
\begin{aligned}
<\Psi|H|\Psi> &=<\Psi|\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}(\sum_{i=1}^{3}a_{\mathbf{p}}^{i\dagger}a_{\mathbf{q}}^i-a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{q}}^0)|\Psi> \\
&=<\Psi|\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\sum_{i=1}^{2}a_{\mathbf{p}}^{i\dagger}a_{\mathbf{q}}^i|\Psi>
\end{aligned} \tag{48}
$$

上式是大于0的，这点表示作用在两个态矢之间，确实可以把非物理的极化消去，所以我们观测的结果也都是和上述理论是相符的–只有横向的光子才对物理的过程或可观测量有贡献。

为此，更常见的，通常也把哈密顿量的极化求和仅限于1，2横向极化：

$$
H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}(\sum_{i=1}^{2}a_{\mathbf{p}}^{i\dagger}a_{\mathbf{q}}^i) \tag{49}
$$

对于动量，角动量等物理量，也可以有类似的过程，将非物理的极化消去，在这里由于小论文时间所限，笔者没有精力进一步计算。

2 有质量矢量场的正则量子化

对于有质量的矢量场，我们需要在自由场的拉格朗日量中间添加一个质量项，正如标量场中的质量项：

$$
\mathcal{L}_{massive}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_A^2A^\mu A_\mu \tag{50}
$$

这种场通过查阅资料可知，被称为 Proca 场 我们可以写出它的拉格朗日方程如下：

$$
\begin{aligned}
& \partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)})-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=0 \\
& \Rightarrow -\partial_\mu F^{\mu\nu}-m_A^2A^\nu=0 \\
& \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu}+m_A^2A^\nu=0
\end{aligned} \tag{51}
$$

由于增加了质量项，拉格朗日量不再具有规范不变性，所以不能够选取一个规范，然后再试图对运动方程简化，所以我们只能继续挖掘运动方程本身具有的约束。所以在方程两边同时再求一次导数：

$$
\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}+m_A^2\partial_\nu A^\nu=0
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} + m_A^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \\
&\Rightarrow \partial_\nu A^\nu = 0
\end{aligned} \tag{52}
$$

这里的第二步是由于$F^{\mu\nu}$的指标交换反对称，而$\partial_\mu\partial_\nu$的指标交换对称，所以二者相乘将给出零的结果。

从上式可以看出，有质量的矢量场是自动满足类似于Lorentz规范的约束的。将上述约束条件再带回拉格朗日方程中，可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A^\nu = 0 \\
&\Rightarrow \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m_A^2 A^\nu = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + m_A^2 A^\nu = 0 \\
&\Rightarrow \partial^2 A^\nu + m_A^2 A^\nu = 0 \\
&\Rightarrow (\partial^2 + m_A^2) A^\nu = 0
\end{aligned} \tag{53}
$$

也就是说有质量矢量场的每个分量都满足Klein-Gordon方程。而且再加上本身就具有的约束条件$\partial_\nu A^\nu = 0$，可以看到，一共只有三个独立的自由度。

接下来，和之前一样，可以写下正则动量：

$$
\begin{aligned}
\pi^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} \\
&= -\frac{1}{2}((\delta_\mu^0 \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^0 \delta_\mu^\alpha)\partial^\mu A^\nu - F_{\mu\nu} g^{\mu 0} g^{\nu\alpha}) \\
&= -F^{0\alpha}
\end{aligned} \tag{54}
$$

这里，我们发现：

$$
\pi^0 = 0 \tag{55}
$$

这点并不奇怪，因为这意味着只有第1，2，3个动量才有物理意义。而对于场算符，由以上的讨论已知确实只有3个独立的场分量，所以这二者确实是契合的。但是由于A^0未必是0，所以正则量子化条件可能需要修改。

2.1 正则量子化

类似的，我们可以先得到第1，2，3分量的正则量子化条件：

$$
[A^i(x), \pi^j(y)]|_{x^0=y^0} = i g^{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{56a}
$$

$$
[A^i(x), A^j(y)]|_{x^0=y^0} = [\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \tag{56b}
$$

对于第0分量，需要重新考察，来修改具有协变性的正则量子化条件。

首先，由运动方程(51)可知：

$$
A^0 = -\frac{\partial_\mu F^{\mu 0}}{m^2} = -\frac{\partial_\mu \pi^\mu}{m^2} = -\frac{\nabla \cdot \pi}{m^2} \tag{57}
$$

且由约束条件(52)

$$
\partial_\nu A^\nu = 0 \Rightarrow \dot{A}_0 = -\nabla \cdot \mathbf{A}
$$

则有关于A^0, A^i的正则对易关系：

$$\begin{aligned}
[A^0(x), A^i(y)]|_{x^0=y^0} =& \frac{1}{m^2}[\partial_{x,j}\pi^j(x), A^i(y)]|_{x^0=y^0} \\
=& -\frac{1}{m^2}\partial_{x,j}[\pi^j(x), A^i(y)]|_{x^0=y^0} \\
=& \frac{ig^{ij}}{m^2}\partial_{x,j}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
=& \frac{i}{m^2}\partial_x^i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (58) \\
[A^0(x), A^0(y)]|_{x^0=y^0} =& 0 \qquad (59)
\end{aligned}$$

下面来考察A^0, π^i的正则对易关系：

$$[A^0(x), \pi^i(y)]|_{x^0=y^0} = -\frac{1}{m^2}\partial_{j,\mathbf{x}}[\pi_j(x), \pi_i(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \qquad (60)$$

此外，我们还将会推导几个有用的对易关系：

$$\begin{aligned}
[\dot{A}^0(x), A^0(y)]|_{x^0=y^0} &= -\partial_{\mathbf{x},i}[A^i(x), A^0(y)]|_{x^0=y^0} \\
&= \frac{i}{m^2}\partial_{\mathbf{x},i}\partial_{\mathbf{x}}^i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (61) \\
[\dot{A}^i(x), A^j(y)]|_{x^0=y^0} &= [-\frac{1}{m^2}\partial^i\partial_k\pi^k(x) - \pi^i, A^j(y)]|_{x^0=y^0} \\
&= ig^{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{1}{m^2}\partial_{\mathbf{x}}^i\partial_{k,\mathbf{x}}[\pi^k(x), A^j(y)]|_{x^0=y^0} \\
&= ig^{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{1}{m^2}\partial_{\mathbf{x}}^i\partial_{k,\mathbf{x}}ig^{jk}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= i(g^{ij} + \frac{1}{m^2}\partial_{\mathbf{x}}^i\partial_{\mathbf{x}}^j)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (62) \\
[\dot{A}^0(x), A^i(y)]|_{x^0=y^0} &= \partial_{\mathbf{x},j}[A^j(x), A^i(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \qquad (63) \\
[\dot{A}^i(x), A^0(y)]|_{x^0=y^0} &= [-\frac{1}{m^2}\partial^i\partial_k\pi^k(x) - \pi^i, A^0] = 0 \qquad (64) \\
[\dot{A}^i(x), \dot{A}^j(y)]|_{x^0=y^0} &= 0 \qquad (65) \\
[\dot{A}^0(x), \dot{A}^0(y)]|_{x^0=y^0} &= 0 \qquad (66) \\
& \qquad (67)
\end{aligned}$$

其中，我们利用了以下关系：

$$\begin{aligned}
\pi^i &= \partial^i A^0 - \dot{A}^i \\
\Rightarrow \dot{A}^i &= \partial^i A^0 - \pi^i \\
\Rightarrow \dot{A}^i &= -\frac{1}{m^2}\partial^i\partial_j\pi^j - \pi^i \qquad (68)
\end{aligned}$$

综合起来，就是：

$$
\begin{cases}
[A^i(x),\pi^j(y)]|_{x^0=y^0}=ig^{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\
[A^0(x),\pi^i(y)]|_{x^0=y^0}=0\\
\pi^0=0\\
[A^i(x),A^j(y)]|_{x^0=y^0}=[\pi^\mu(x),\pi^\nu(y)]|_{x^0=y^0}=0\\
[A^0(x),A^0(y)]|_{x^0=y^0}=0\\
[A^0(x),A^i(y)]|_{x^0=y^0}=\dfrac{ig^{ij}}{m^2}\partial_{x,j}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{cases}
$$

接下来，按照之前的方式(27)，将场算符按照平面波展开：

$$
A^\mu(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu_\lambda(a^\lambda_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+a^{\lambda\dagger}_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}) \tag{69}
$$

可以发现，这里的展开形式和无质量情形完全已知。而由此时每个场分量之间固有的约束(52)可知，极化分量也会受到约束。

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu A^\mu=0\\
&\Rightarrow\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{-i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}p_\mu\epsilon^\mu_\lambda(a^\lambda_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}-a^{\lambda\dagger}_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x})=0\\
&\Rightarrow p_\mu\epsilon^\mu_\lambda=0
\end{aligned} \tag{70}
$$

则要求，极化矢量的四个分量中，只能有3个是独立的。也就是说，极化矢量的四个基中，只能有三个满足上述方程(70)。所以，不妨假设第1，2，3个极化满足这个约束，然后仍然以z方向作为动量方向$k^\mu=(\omega,0,0,k)$，则可以将这三个极化简单地表示为如下：

$$
\epsilon^\mu_1=(0,1,0,0)^T,\epsilon^\mu_2=(0,0,1,0)^T,\epsilon^\mu_3=(\frac{k}{m},0,0,\frac{\omega}{m})^T \tag{71}
$$

为了满足极化矢量之间的正交归一条件，我们可以要求：

$$
\epsilon^\mu_0=(\frac{\omega}{m},0,0,\frac{k}{m})^T \tag{72}
$$

那么，我们可以证明如下的完备性条件成立：

$$
\begin{aligned}
&g^{rr}\epsilon^\mu_r\epsilon^\nu_r=g^{\mu\nu},r=0,1,2,3\\
&\Rightarrow\ -\sum_{r=1}^{3}\epsilon^\mu_r\epsilon^\nu_r+\epsilon^\mu_0\epsilon^\nu_0=g^{\mu\nu}\\
&\Rightarrow\ -\sum_{r=1}^{3}\epsilon^\mu_r\epsilon^\nu_r+\frac{k^\mu k^\nu}{m^2}=g^{\mu\nu}\\
&\Rightarrow\sum_{r=1}^{3}\epsilon^\mu_r\epsilon^\nu_r=-(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m^2})
\end{aligned} \tag{73}
$$

则不难验证，$k_\mu\sum_{r=1}^{3}\epsilon^\mu_r\epsilon^\nu_r=-(k^\nu-\frac{k_\mu k^\mu k^\nu}{m^2})$

$$\Rightarrow k_\mu \sum_{r=1}^{3} \epsilon_r^\mu \epsilon_r^\nu = -(k^\nu - \frac{k^2 k^\nu}{m^2}) = 0 \tag{74}$$

所以和之前一样，我们可以只选择这三个物理的，独立的极化作为场算符中的极化求和项，将场算符写为如下：

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^\mu (a_\mathbf{p}^i e^{-ip\cdot x} + a_\mathbf{p}^{i\dagger} e^{ip\cdot x}) \\ &= \int d^3\mathbf{p} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^\mu (a_\mathbf{p}^i \phi_\mathbf{p}(\mathbf{x}) + a_\mathbf{p}^{i\dagger} \phi_p^*(x)) \end{aligned} \tag{75}$$

利用平面波基的正交归一条件，我们可以解出产生湮灭算符：将上式的左右两侧分别作用$\int d^3\mathbf{x}(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathbf{p}'}^*(x)$则有：

$$\begin{aligned} &\int d^3\mathbf{x} A^\mu (+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathbf{p}'}^*(x) = \int d^3\mathbf{p} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^\mu a_\mathbf{p}^i \int d^3\mathbf{x} \phi_\mathbf{p}(\mathbf{x})(+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathbf{p}'}^*(x) \\ &\Rightarrow \int d^3\mathbf{x} A^\mu (+i)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathbf{p}'}^*(x) = \int d^3\mathbf{p} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^\mu a_\mathbf{p}^\lambda (-\frac{1}{(2\pi)^3})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^\mu a_\mathbf{p}^i = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \phi_{\mathbf{p}'}^*(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu \end{aligned} \tag{76}$$

上式两边我们同时乘以量$\epsilon_{s\mu}$我们可以解出$a_\mathbf{p}$，其中，我们将会用到极化矢量之间的正交归一条件：

$$\epsilon_{s\mu}\epsilon_{s'}^\mu = -\delta_{ss'}, s = 1, 2, 3 \tag{77}$$

所以：

$$\begin{aligned} &\epsilon_{s\mu}\epsilon_i^\mu a_\mathbf{p}^i = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \phi_\mathbf{p}^*(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu \\ &\Rightarrow -\delta_{si} a_\mathbf{p}^i = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \phi_\mathbf{p}^*(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu \\ &\Rightarrow a_{s\mathbf{p}} = -(2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \phi_\mathbf{p}^*(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu \end{aligned} \tag{78}$$

然后，我们可以具体的写出湮灭算符的表示：

$$\begin{aligned} a_{s\mathbf{p}} &= -(2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \phi_\mathbf{p}^*(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu = -\int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \frac{ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(\dot{A}^\mu - iE_\mathbf{p} A^\mu) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(-\epsilon_{s0}\frac{1}{m^2}\partial_j \pi^j - \frac{1}{m^2}\epsilon_{si}\partial^i\partial_j\pi^j - \epsilon_{si}\pi^i - iE_\mathbf{p}\epsilon_{s0}A^0 - i\epsilon_{si}E_\mathbf{p}A^i) \end{aligned} \tag{79}$$

类似的，产生算符也可以写出，如下：

$$\begin{aligned} a_{s\mathbf{p}}^\dagger &= (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \phi_\mathbf{p}(x)(+i)\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu = \int d^3\mathbf{x} \epsilon_{s\mu} \frac{ie^{-ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(\dot{A}^\mu + iE_\mathbf{p} A^\mu) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \frac{ie^{-ip\cdot x}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(-\epsilon_{s0}\frac{1}{m^2}\partial_j \pi^j - \frac{1}{m^2}\epsilon_{si}\partial^i\partial_j\pi^j - \epsilon_{si}\pi^i + iE_\mathbf{p}\epsilon_{s0}A^0 + i\epsilon_{si}E_\mathbf{p}A^i) \end{aligned} \tag{80}$$

然后，我们将会试图推导它们的对易关系：

$$[a_{s\mathbf{p}}, a^{\dagger}_{s'\mathbf{p}'}] = \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\epsilon_{s\mu}\epsilon_{s'\nu}[\dot{A}^{\mu} - iE_{\mathbf{p}}A^{\mu}, \dot{A}^{\nu} + iE_{\mathbf{p}'}A^{\nu}]$$

$$= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}([-\epsilon_{s0}\frac{1}{m^2}\partial_j\pi^j - \frac{1}{m^2}\epsilon_{si}\partial^i\partial_j\pi^j - \epsilon_{si}\pi^i - iE_{\mathbf{p}}\epsilon_{s0}A^0 - i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}A^i,$$

$$- \epsilon_{s'0}\frac{1}{m^2}\partial_{j'}\pi^{j'} - \frac{1}{m^2}\epsilon_{s'i'}\partial^{i'}\partial_{j'}\pi^{j'} - \epsilon_{s'i'}\pi^{i'} + iE_{\mathbf{p}'}\epsilon_{s'0}A^0 + i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}A^{i'}])$$

$$= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}(-\epsilon_{s0}\frac{1}{m^2}\partial_{j,\mathbf{x}}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}[\pi^j(\mathbf{x}), A^{i'}(\mathbf{x}')] - \frac{1}{m^2}\epsilon_{si}\partial^{i,\mathbf{x}}\partial_{j,\mathbf{x}}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}[\pi^j(\mathbf{x}), A^{i'}(\mathbf{x}')]$$

$$- \epsilon_{si}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}[\pi^i(\mathbf{x}), A^{i'}(\mathbf{x}')] - iE_{\mathbf{p}}\epsilon_{s0}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}[A^0(\mathbf{x}), A^{i'}(\mathbf{x}')]$$

$$+ i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}\epsilon_{s'0}\frac{1}{m^2}\partial_{j'\mathbf{x}'}[A^i(\mathbf{x}), \pi^{j'}(\mathbf{x}')] + i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}\epsilon_{s'i'}\partial^{i'}_{\mathbf{x}'}\partial_{j',\mathbf{x}'}[A^i(\mathbf{x}), \pi^{j'}(\mathbf{x}')] + i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}\epsilon_{s'i'}[A^i(\mathbf{x}), \pi^{i'}(\mathbf{x}')]$$

$$- i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}iE_{\mathbf{p}'}\epsilon_{s'0}[A^i(\mathbf{x}), A^0(\mathbf{x}')])$$

$$= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}(+\epsilon_{s0}\frac{1}{m^2}\partial_{j,\mathbf{x}}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}ig^{i'j}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{1}{m^2}\epsilon_{si}\partial^{i,\mathbf{x}}\partial_{j,\mathbf{x}}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}ig^{i'j}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$+ \epsilon_{si}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}ig^{ii'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - iE_{\mathbf{p}}\epsilon_{s0}i\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}\frac{i}{m^2}\partial^{i'}_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$+ i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}\epsilon_{s'0}\frac{1}{m^2}\partial_{j'\mathbf{x}'}ig^{ij'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}\epsilon_{s'i'}\partial^{i'}_{\mathbf{x}'}\partial_{j',\mathbf{x}'}ig^{ij'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}\epsilon_{s'i'}ig^{ii'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$+ i\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}iE_{\mathbf{p}'}\epsilon_{s'0}\frac{i}{m^2}\partial^i_{\mathbf{x}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'))$$

$$= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}(-g^{i'j}\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}\frac{1}{m^2}\partial_{j,\mathbf{x}}E_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - g^{i'j}\epsilon_{s'i'}\epsilon_{si}\frac{1}{m^2}\partial^{i,\mathbf{x}}\partial_{j,\mathbf{x}}E_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$- g^{ii'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{i}{m^2}\partial^{i'}_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$- g^{ij'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}\partial_{j'\mathbf{x}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - g^{ij'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}\partial^{i'}_{\mathbf{x}'}\partial_{j',\mathbf{x}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - g^{ii'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$- \epsilon_{s'0}\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{i}{m^2}\partial^i_{\mathbf{x}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'))$$

$$= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}'\frac{-ie^{ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{ie^{-ip'\cdot x'}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}(-g^{i'j}\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}\frac{i}{m^2}p_jE_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + g^{i'j}\epsilon_{s'i'}\epsilon_{si}\frac{1}{m^2}p^ip_jE_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$- g^{ii'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{1}{m^2}p^{i'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$+ g^{ij'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{i}{m^2}p'_{j'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + g^{ij'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p'^{i'}p'_{j'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - g^{ii'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$- \epsilon_{s'0}\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{1}{m^2}p'^i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'))$$

$$= \int d^3\mathbf{x}\frac{e^{i(p-p')\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}(-g^{i'j}\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}\frac{i}{m^2}p_jE_{\mathbf{p}'} + g^{i'j}\epsilon_{s'i'}\epsilon_{si}\frac{1}{m^2}p^ip_jE_{\mathbf{p}'}$$

$$- g^{ii'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{1}{m^2}p^{i'}$$

$$+ g^{ij'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{i}{m^2}p'_{j'} + g^{ij'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p'^{i'}p'_{j'} - g^{ii'}\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}$$

$$- \epsilon_{s'0}\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{1}{m^2}p'^i$$

$$= \int d^3\mathbf{x}\frac{e^{i(p-p')\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}(-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}\frac{i}{m^2}p^{i'}E_{\mathbf{p}'} + \epsilon_{s'i'}\epsilon_{si}\frac{1}{m^2}p^ip^{i'}E_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{1}{m^2}p^{i'}$$

$$+\epsilon_{si}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{i}{m^2}p'^i+\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p'^{i'}p'^i-\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}}-\epsilon_{s'0}\epsilon_{si}E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}\frac{1}{m^2}p'^i$$
$$=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}\frac{i}{m^2}p^{i'}E_{\mathbf{p}}+\epsilon_{s'i'}\epsilon_{si}\frac{1}{m^2}p^ip^{i'}E_{\mathbf{p}}-\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}}-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^{i'}$$
$$+\epsilon_{si}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{i}{m^2}p^i+\epsilon_{si}\epsilon_{s'i'}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^{i'}p^i-\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}}-\epsilon_{s'0}\epsilon_{si}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^i) \tag{81}$$

而上式可以进一步写成下式：

$$[a_{s\mathbf{p}},a^\dagger_{s'\mathbf{p}'}]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}\frac{i}{m^2}p^{i'}E_{\mathbf{p}}+\epsilon_{s'i'}\epsilon_{si}\frac{2E_{\mathbf{p}}}{m^2}p^ip^{i'}-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'i'}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^{i'}$$
$$+\epsilon_{si}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{i}{m^2}p^i-\epsilon_{s'0}\epsilon_{si}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^i-2\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}})$$
$$=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'0}\frac{i}{m^2}p^0E_{\mathbf{p}}+\epsilon_{s'0}\epsilon_{s0}\frac{2E_{\mathbf{p}}}{m^2}p^0p^0-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'0}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^0$$
$$+\epsilon_{s0}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{i}{m^2}p^0-\epsilon_{s'0}\epsilon_{s0}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^0-2\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}})$$
$$=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(\epsilon_{s'0}\epsilon_{s0}\frac{2E_{\mathbf{p}}}{m^2}p^0p^0-2\epsilon_{s0}\epsilon_{s'0}E^2_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^0-2\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'}E_{\mathbf{p}})$$
$$=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')(\epsilon_{s'0}\epsilon_{s0}\frac{1}{m^2}p^0p^0-\epsilon_{s0}\epsilon_{s'0}E_{\mathbf{p}}\frac{1}{m^2}p^0-\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'})$$
$$=-(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\epsilon_{si}\epsilon^i_{s'} \tag{82}$$

而对于第1，2，3个极化矢量，它满足正交归一关系，所以有：

$$[a_{s\mathbf{p}},a^\dagger_{s'\mathbf{p}'}]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'} \tag{83}$$

我们可以使用同样的方法推导出另外的两个生灭算符的对易关系，所以总的对易关系如下：

$$[a_{s\mathbf{p}},a^\dagger_{s'\mathbf{p}'}]=-g_{ss'}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{84a}$$
$$[a_{s\mathbf{p}},a_{s'\mathbf{p}'}]=0 \tag{84b}$$
$$[a^\dagger_{s\mathbf{p}},a^\dagger_{s'\mathbf{p}'}]=0 \tag{84c}$$

由于s,s'只可以取1，2，3所以对易关系总是大于0的，不同于无质量场，这里的符号是没有问题的。

至此，有质量矢量场的正则量子化已经完成。

2.2 能量的计算

$$\text{首先，}\pi^i=F^{i0}=\partial^iA^0-\dot{A}^i=-\frac{\partial^i\partial_j\pi^j}{m^2}-\dot{A}^i$$
$$\text{而且，已经有}\pi^0=0 \tag{85}$$

所以，我们可以将哈密顿密度写出如下：

$$\mathcal{H}=\pi^\mu\dot{A}_\mu-\mathcal{L}=-\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu+\frac{1}{2}(\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu-\nabla A_\nu\cdot\nabla A^\nu)-\frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu$$
$$=-\frac{1}{2}(\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu+\nabla A_\nu\cdot\nabla A^\nu)-\frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu \tag{86}$$

这个哈氏密度的前半部分和无质量矢量场的部分一致，所以哈密顿量可以写出如下：

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x \mathcal{H} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3x \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \epsilon_r^{\mu}\epsilon_{s\mu}\{[-E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}](a_{\mathbf{p}}^r e^{-ip\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}e^{ip\cdot x})(a_{\mathbf{q}}^s e^{-iq\cdot x} - a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}e^{iq\cdot x}) \\
&+ m_A^2(a_{\mathbf{p}}^r e^{-ip\dot{x}} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}e^{ip\cdot x})(a_{\mathbf{q}}^s e^{-iq\cdot x} + a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}e^{iq\cdot x})\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3x \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \epsilon_r^{\mu}\epsilon_{s\mu}\{[-E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}] \\
&(a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^s e^{-i(p+q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{-i(p-q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{q}}^s e^{-i(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{i(p+q)\cdot x}) \\
&+ m_A^2(a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^s e^{-i(p+q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{-i(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{q}}^s e^{-i(p-q)\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{i(p+q)\cdot x})\} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \epsilon_r^{\mu}\epsilon_{s\mu}\{(-E_{\mathbf{p}}^2 + \mathbf{p}^2)(a_{\mathbf{p}}^r a_{-\mathbf{p}}^s e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{2iE_{\mathbf{p}}t}) - (E_{\mathbf{p}}^2 + \mathbf{p}^2)(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) \\
&+ m_A^2[(a_{\mathbf{p}}^r a_{-\mathbf{p}}^s e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{2iE_{\mathbf{p}}t}) + (a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger})]\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \epsilon_r^{\mu}\epsilon_{s\mu}\{(E_{\mathbf{p}}^2 + \mathbf{p}^2)(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) + m_A^2(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger})\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \epsilon_r^{\mu}\epsilon_{s\mu}(E_{\mathbf{p}}^2)(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \epsilon_r^{\mu}\epsilon_{s\mu}E_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \delta_{rs}E_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{3} E_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r + a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{3} E_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r + (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r
\end{aligned} \tag{87}
$$

其中，我们忽略了真空零点能，并且应用了质能关系$E_{\mathbf{p}}^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$最终得到了合理的结论。

3 总结与其他

本次调研小论文中，笔者主要进行了无源，真空自由矢量场的正则量子化的调研，其中笔者把主要的过程进行了详尽的推演，所以对正则量子化确实有了进一步的理解和掌握。场的量子化我觉得是一个很有意思的主题，中间涉及了丰富的物理思想。

最后，笔者在这里对高道能老师进行由衷的感谢，他在课堂上的讲解很具有启发性，大大加深了我对量子场论的理解。

****

本次调研报告由Latex排版。
****